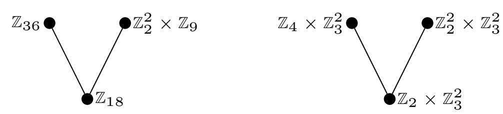
Feladat 1. Határozza meg izomorfia erejéig a 18 és a 36 elemű Abel-csoportokat, és szemléltesse gráffal, hogy mely 18 elemű ágyazható be mely 36 eleműbe.

Megoldás: Az a kérdés, hogyan lehet felírni a 18-at és a 36-ot prímhatványok szorzataként. Előbbit kettő, utóbbit négyféleképpen: $18 = 2 \cdot 9 = 2 \cdot 3^2$, $36 = 4 \cdot 9 = 4 \cdot 3^2 = 2^2 \cdot 9 = 2^2 \cdot 3^2$. Így a 36 elemű Abel-csoportok:

- $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9 \equiv \mathbb{Z}_{36}$, amibe beágyazható $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9 \equiv \mathbb{Z}_{18}$, mert 36 rendű ciklikus csoportnak van 18 elemű ciklikus részcsoportja. A $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3^2$ nem egyázható be $\mathbb{Z}_{36}$-ba, mert $\mathbb{Z}_{36}$-nak csak két harmadrendű eleme van (12 és 24), míg $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3^2$-nek nyolc ($(0, x, y)$ minden $(x, y) \neq (0, 0)$ esetén harmadrendű).
- $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3^2$, amibe beágyazható $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3^2$ (például az $(x, y, z) \to (2x, y, z)$ injektív homomorfizmus), de $\mathbb{Z}_{18}$ nem, mert $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3^2$-nek nincs 18 rendű eleme.
- $\mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_9$, amibe beágyazható $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9 \equiv \mathbb{Z}_{18}$ (például $(1, 1, 1)$ rendje 18), de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3^2$ nem, hiszen $\mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_9$-ben is csak két harmadrendű elem van ($(0, 0, 3)$ és $(0, 0, 6)$).
- $\mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_3^2$, amibe beágyazható $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3^2$ (például az $(x, y, z) \to (0, x, y, z)$ injektív homomorfizmus), de $\mathbb{Z}_{18}$ nem, mert $\mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_3^2$-nek nincs 18 rendű eleme.

A gráf:



Feladat 2. Igazolja, hogy az

$$\mathbf{A}_5 \to \mathbf{A}_5, \quad \sigma \to (12)\sigma(12)$$

az $\mathbf{A}_5$ csoport egy külső automorfizmusa.

Megoldás: Legyen a leképezés γ. A γ bijektív, hiszen az (12)-vel való bal- és jobbszorzás is bijektív $\mathbf{S}_5$-ben, ezek szorzata tehát egy bijektív leképezés $\mathbf{S}_5$-ön, amire nézve A_5 zárt. A γ homomorfizmus, hiszen $\sigma_1, \sigma_2 \in A_5$ esetén

$$(\sigma_1\sigma_2)\gamma = (12)\sigma_1\sigma_2(12) = (12)\sigma_1(12) \cdot (12)\sigma_2(12) = \sigma_1\gamma \cdot \sigma_2\gamma.$$

Az kell még, hogy γ nem belső automorfizmus, vagyis hogy nincs olyan $\tau \in A_5$ permutáció, hogy minden $\sigma \in A_5$ esetén $\sigma\gamma = \tau^{-1}\sigma\tau$. Egy ilyen τ-ra teljesülne, hogy

$$(\tau(12))^{-1}\sigma(\tau(12)) = (12)\tau^{-1}\sigma\tau(12) = (12)(\sigma\gamma)(12) = (12)(12)\sigma(12)(12) = \sigma,$$

vagyis hogy $\tau(12)$ felcserélhető minden A_5-beli permutációval. Ezt viszont csak az identitás tudja: az (12345)-tel csak akkor cserélhető fel egy S_5-beli permutáció, ha hatványa annak (gondoljunk a 3.3 Állításra: csak öt permutációval lehet konjugálni (12345)-öt, hogy önmagát kapjuk vissza). Ugyanígy az (12354)-gyel csak a saját hatványai cserélhetőek fel, viszont csak az identitás az, ami mind a kettőnek hatványa.

Tehát $\tau(12)$ megegyezik az identitással, így $\tau = (12)$, ellentmondva annak, hogy τ páros.

Feladat 3. Legyen $\mathbf{G}$ véges csoport, $g \in G$. Mutassa meg, hogy

$$|\operatorname{Aut}\mathbf{G}| = |\{h \in G : \exists\alpha \in \operatorname{Aut}\mathbf{G} : g\alpha = h\}| \cdot |\{\beta \in \operatorname{Aut}\mathbf{G} : g\beta = g\}|.$$

Megoldás: Legyen
$$O_g := \{h \in G : \exists \alpha \in \operatorname{Aut}\mathbf{G} : g\alpha = h\},$$
ezt g *pályájának (orbit)* szokás nevezni (az automorfizmuscsoportra nézve). Emellett legyen
$$F_g := \{\beta \in \operatorname{Aut}\mathbf{G} : g\beta = g\}$$
a g-t fixen hagyó automorfizmusok halmaza.

Minden $h \in O_g$-re létezik egy $\alpha_h \in \operatorname{Aut}\mathbf{G}$, amelyre $g\alpha_h = h$. Ekkor minden $\beta \in \operatorname{Aut}\mathbf{G}$-re
$$g\beta = h \Leftrightarrow g\beta = g\alpha_h \Leftrightarrow g\beta\alpha_h^{-1} = g \Leftrightarrow \beta\alpha_h^{-1} \in F_g \Leftrightarrow \beta \in F_g\alpha_h.$$
Ezért
$$|\{\beta \in \operatorname{Aut}\mathbf{G} : g\beta = h\}| = |F_g|,$$
és
$$|\operatorname{Aut}\mathbf{G}| = \Sigma_{h\in O_g}|\{\beta \in \operatorname{Aut}\mathbf{G} : g\beta = h\}| = \Sigma_{h\in O_g}|F_g| = |O_g| \cdot |F_g|.$$

Feladat 4. Adja meg a $\mathbf{D}_8$ csoport egy külső automorfizmusát.

Megoldás: Legyen $\varphi \in \operatorname{Aut}\mathbf{D}_8$. Ekkor $o(a\varphi) = o(a) = 8$, így $a\varphi \in \{a, a^3, a^5, a^7\}$. Mivel az $\{a, t\}$ generátorrendszere $\mathbf{D}_8$-nak, $\{a\varphi, t\varphi\}$ is az lesz. Így $t\varphi$ tengelyes tükrözés.

Tehát a-nak négy, t-nek nyolc lehetséges képe van. Ezek a képek egyértelműen meghatározzák a potenciális automorfizmust: ha $a\varphi = a^i$ és $t\varphi = a^j t$, akkor minden x és y esetén
$$(a^x t^y)\varphi = (a\varphi)^x (t\varphi)^y = a^{ix}(a^j t)^y = \begin{cases} a^{ix+j}t, & \text{ha } y \text{ páratlan} \\ a^{ix}, & \text{ha } y \text{ páros} \end{cases}.$$
Meg kell nézni, hogy ez mely $(i, j) \in \{1, 3, 5, 7\} \times \{0, 1, \ldots, 7\}$ választásokra lesz automorfizmus. Könnyű látni, hogy mindig bijektív lesz, és az is igaz, hogy mindig homomorfizmus:
$$(a^{x_1}t^{y_1} \cdot a^{x_2}t^{y_2})\varphi = (a^{x_1} \cdot a^{(-1)^{y_1}x_2}t^{y_1} \cdot t^{y_2})\varphi = (a^{x_1+(-1)^{y_1}x_2}t^{y_1+y_2})\varphi =$$
$$\begin{cases} a^{i(x_1+(-1)^{y_1}x_2)+j}t, & \text{ha } y_1 + y_2 \text{ páratlan} \\ a^{i(x_1+(-1)^{y_1}x_2)}, & \text{ha } y_1 + y_2 \text{ páros} \end{cases} =$$
$$\begin{cases} a^{ix_1}a^{(-1)^{y_1}ix_2+j}t, & \text{ha } y_1 \text{ páros, } y_2 \text{ páratlan} \\ a^{ix_1+j}a^{(-1)^{y_1}ix_2}t, & \text{ha } y_1 \text{ páralan, } y_2 \text{ páros} \\ a^{ix_1+j}a^{(-1)^{y_1}(ix_2+j)}, & \text{ha } y_1 \text{ és } y_2 \text{ páratlan} \\ a^{ix_1}a^{(-1)^{y_1}ix_2}, & \text{ha } y_1 \text{ és } y_2 \text{ páros} \end{cases} =$$
$$\begin{cases} a^{ix_1}a^{ix_2+j}t, & \text{ha } y_1 \text{ páros, } y_2 \text{ páratlan} \\ a^{ix_1+j}a^{-ix_2}t, & \text{ha } y_1 \text{ páralan, } y_2 \text{ páros} \\ a^{ix_1+j}a^{-(ix_2+j)}t^2, & \text{ha } y_1 \text{ és } y_2 \text{ páratlan} \\ a^{ix_1}a^{ix_2}, & \text{ha } y_1 \text{ és } y_2 \text{ páros} \end{cases} =$$
$$\begin{cases} a^{ix_1}a^{ix_2+j}t, & \text{ha } y_1 \text{ páros, } y_2 \text{ páratlan} \\ a^{ix_1+j}ta^{ix_2}, & \text{ha } y_1 \text{ páralan, } y_2 \text{ páros} \\ a^{ix_1+j}ta^{ix_2+j}t, & \text{ha } y_1 \text{ és } y_2 \text{ páratlan} \\ a^{ix_1}a^{ix_2}, & \text{ha } y_1 \text{ és } y_2 \text{ páros} \end{cases} = (a^{x_1}t^{y_1})\varphi(a^{x_2}t^{y_2})\varphi$$

A $\mathbf{D}_8$ centruma másodrendű, ezért $\mathbf{D}_8$-nak nyolc belső automorfizmusa van. A forgatásokkal való konjugálás a-t a-ba viszi, a tengelyes tükrözésekkel való konjugálás pedig a^7-be. Így például az $(i,j)=(3,0)$ választással külső automorfizmust kapunk.

Feladat 5. Legyen

$$\mathbf{G} := [(4,-16),(-8,2),(12,-12)] \leq \mathbb{Z}^2.$$

Írja fel $\mathbb{Z}^2/\mathbf{G}$-t két nemtriviális részcsoportja belső direkt szorzatatként.

Megoldás: Végezzünk Gauss-eliminációt a megadott vektorokra:

$$\begin{pmatrix} 4 & -16 \\ -8 & 2 \\ 12 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -60 & 0 \\ -8 & 2 \\ -36 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ -8 & 2 \\ -36 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ -8 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A kapott mátrix deterinánsa 24, ennyi lesz $\mathbb{Z}^2/\mathbf{G}$ elemszáma:

$$G = [(12,0),(-8,2)] = \{(12a-8b, 2b) : a,b \in \mathbb{Z}\} = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : 2 \mid y,\ 4 \mid x,\ 3 \mid x+y\}.$$

A direkt felbontást is ki lehet olvasni az eliminációs eljárással kapott mátrixból:

$$\mathbb{Z}^2/\mathbf{G} = [(1,0)/\mathbf{G}] \times [(-4,1)/\mathbf{G}].$$